

FRANCESCO ORESTANO

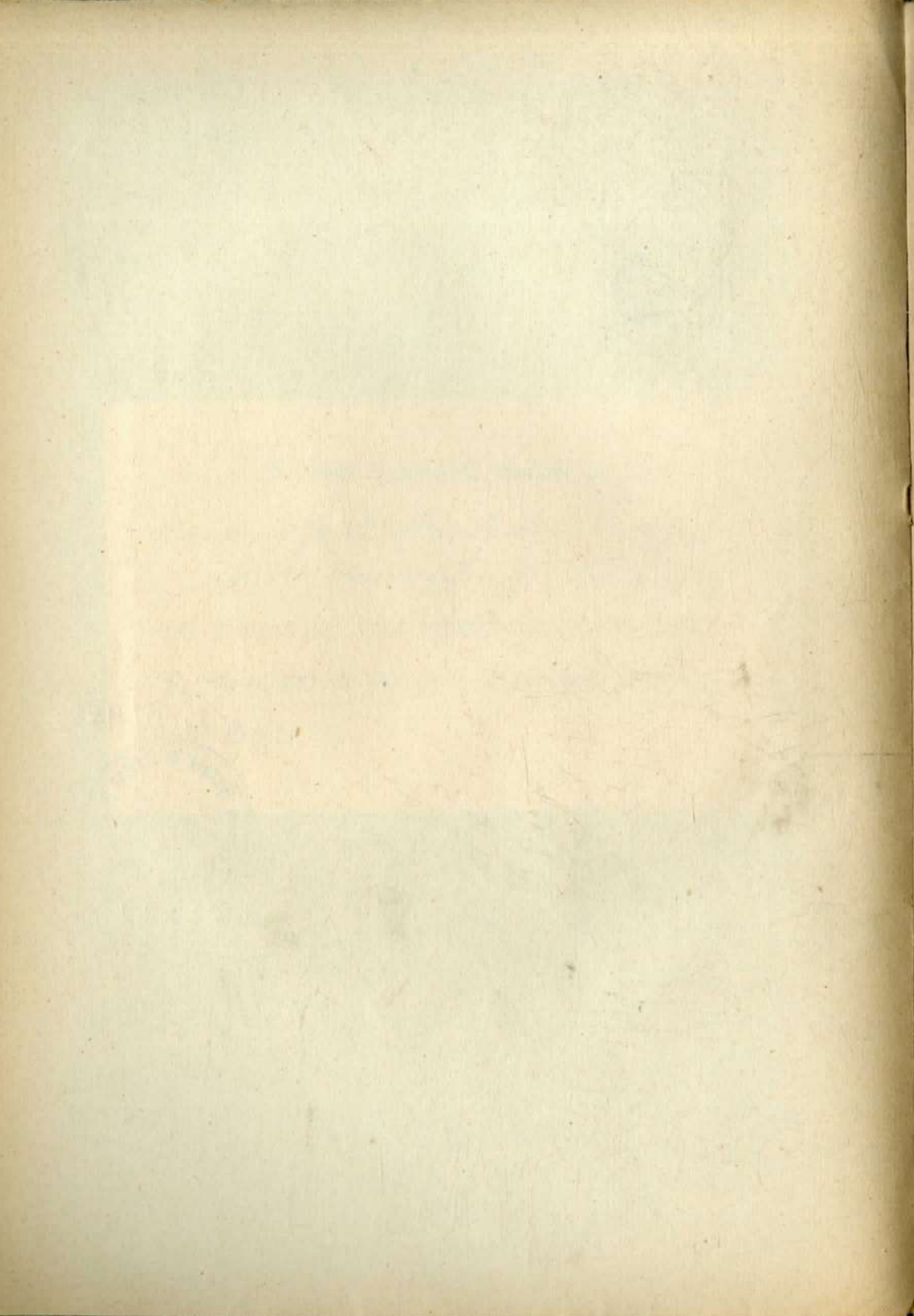


LA

MATEMATICA MODERNA E LA FILOSOFIA

Opusc. PA-I-1185

ROMA
"OPTIMA",
1924

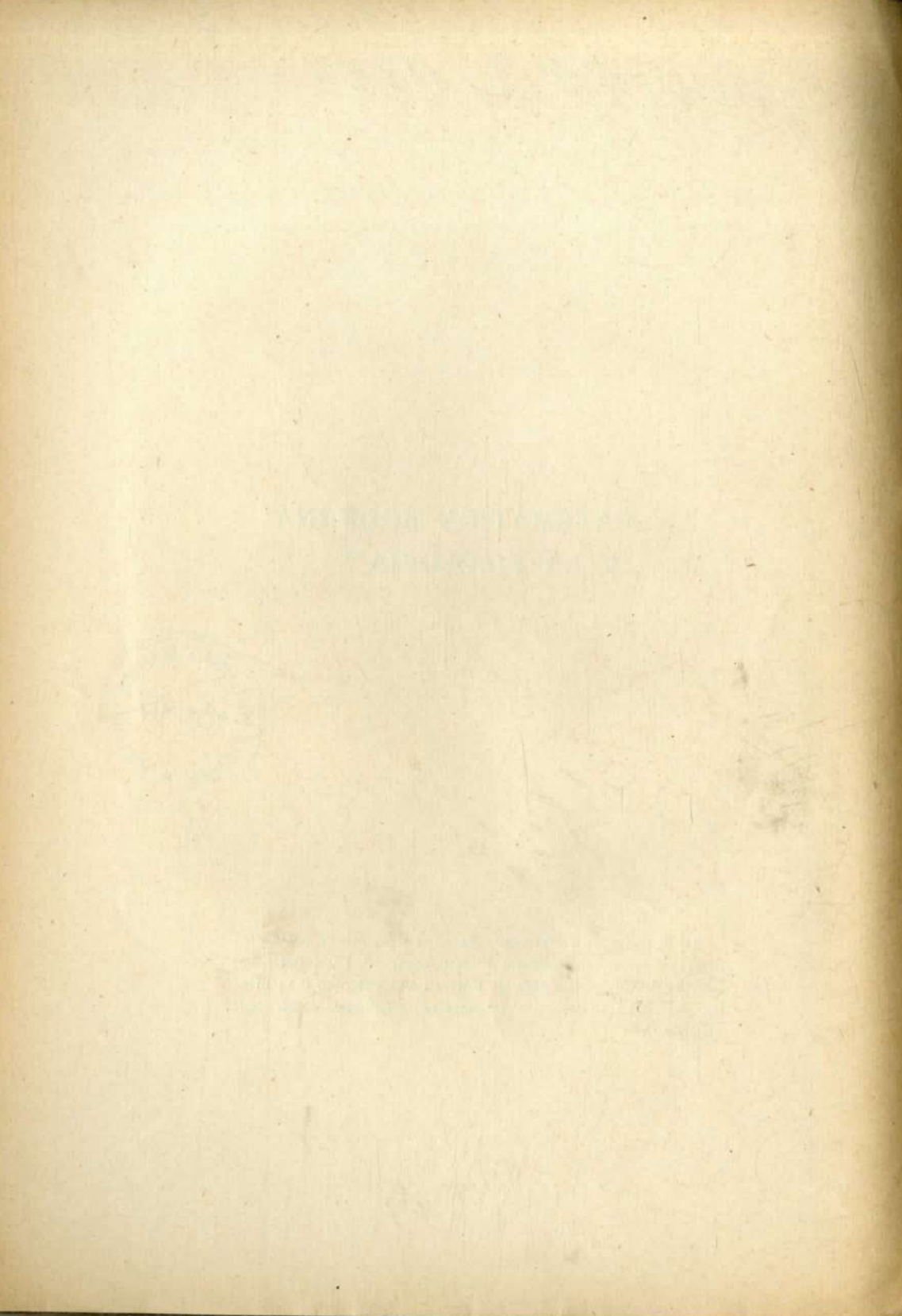


Opus. PA-I-1185-

LA MATEMATICA MODERNA
E LA FILOSOFIA ⁽¹⁾



(1) Estratto da «*Archimede*» *Rassegna bimestrale di matematica fisica e ingegneria*, Palermo, Priulla, 1923, [n° 5-6 (Conferenza tenuta nell'Aula Magna della R. Università di Palermo, il 14 maggio 1923, ad iniziativa dell'Associazione universitaria per gli studi matematici)].



Un filosofo che venga fra matematici a discorrere dei problemi fondamentali della loro scienza, appare oggi come un intruso.

Siamo assai lontani dai tempi in cui i maggiori costruttori di pensiero attingevano con pari maestria alla filosofia e alla matematica, e operavano prodigi d'invenzioni, feconde nell'uno e nell'altro campo.

Tempi remoti! che coincidono con gli inizi stessi della filosofia — Talete che col metodo delle proporzioni calcola l'altezza delle piramidi egiziane; Pitagora che celebra con un'ecatombe la dimostrazione di un già noto teorema —; o con momenti

decisivi e memorabili della storia del pensiero antico — Platone che vieta ai non matematici l'ingresso nell'Accademia.

Tempi a noi più vicini ! quando Leonardo non riconosceva scienza che non passasse « per le matematiche dimostrazioni » ; e Galilei geometrizzava tutta la scienza della natura, la celeste e la terrestre ; e Cartesio giungeva per vie proprie a risolvere la geometria in algebra e a fondere la nuova *analisi* con la sua fisica universale del mondo esteso ; e Leibniz approfondiva l'intimo nesso fra la nuova matematica e il dinamismo della natura col calcolo infinitesimale di sua invenzione ; e Newton, che si contendeva col Leibniz la gloria del metodo delle *flussioni*, acquistava fra i suoi contemporanei fama precipua di teologo e definiva lo spazio vuoto, di cui aveva bisogno per la sua fisica, « il sensorio di Dio ».

Il distacco tra matematica e filosofia data dal sec. XIX, col sorgere di tutta una schiera formidabile di *matematici puri*, i

quali hanno atteso col più libero genio inventivo e con ardore e rigore senza pari a sviluppare la loro scienza in uno splendido isolamento, così nei riguardi della filosofia, come in quelli delle applicazioni.

Non già che la matematica non godesse prima d'allora d'una particolare autonomia. Il pensiero matematico è un tipo privilegiato di pensiero puro, che si pone, si dimostra e si verifica da sè, anche quando sembri connesso, come alle origini, con riscontri di ordine fisico e pratico. E così la disciplina matematica ha sempre costituito un suo proprio sistema chiuso di principi e di metodi. Ma la matematica del sec. XIX ha voluto finalmente svincolarsi da tutta quella superstruttura di riferimenti a problemi metafisici e ontologici, che l'avevano, negli ultimi secoli, sollecitata sì ~~da~~ svilupparsi, ma anche alla fin fine impacciata, ponendola a servizio, quando della metafisica razionalista, quando dell'empirismo fisico. La nuova autonomia voleva, dunque, signifi-

care proposito dichiarato di libertà da ogni obbligo o preoccupazione di riferimenti estrinseci.

Dal loro canto i filosofi, in genere, divennero sempre meno capaci di dominare gli enormi accrescimenti delle matematiche discipline, e svilupparono a preferenza categorie concettuali più ampie, più universali, ma anche, in ragione di questa maggiore universalità, altrettanto imprecise, indeterminate; per cui dovettero appagarsi delle ambiguità del parlare figurato e allegorico.

Quanto questo reciproco distacco, che è stato, poi, secondo alcuni una specie di separazione consensuale fra coniugi, con rari e infruttuosi tentativi di riconciliazione, e secondo altri un vero e proprio divorzio; quanto questo distacco sia stato effettivo, non è oggi mio proposito d'indagare. Accennerò solo, che il pensiero matematico, anche preso a sè, involge problemi e attua, inventa e afforza posizioni mentali

del più alto interesse e valore filosofico ; onde esso è già, a suo modo, nel suo proprio stile, una certa filosofia, che, in quanto tale, non è isolabile e non può non fruttificare nella più ampia economia del pensiero e del sapere.

D'altra parte la filosofia non si è mai totalmente rassegnata alla perdita di questa sua antica provincia, e ha sempre, più o meno, rielaborati concetti e avviati messaggi e talvolta persino decreti, dei quali ultimi i matematici hanno avuto spesso ragione di ridere. Comunque è inconcepibile, che lo straordinario raffinamento di pensiero, la sempre nuova impostazione e il crescente sviluppo dei problemi dello spirito, cui la filosofia giunge da sola, possano rimanere senza effetti per lo stesso pensiero matematico.

Oggi noi vogliamo esaminare, quanto lo stato di separazione nei riguardi della filosofia abbia profittato alla matematica, e quanto le abbia eventualmente nociuto ;

infine, se sia possibile e utile che tra i due campi s'istituiscano nuovi rapporti e su quali basi.

* * *

Cominciamo dal farci, in sintesi, un'idea per quanto possibile chiara dello svolgimento della matematica pura, meglio sarebbe dire, delle discipline matematiche, nel sec. XIX e sino ai nostri giorni.

È questa, come accennammo, l'età dei *matematici puri*. I quali, per altro, sono stati tutt'altro che dei semplici calcolatori. Fra essi si annoverano menti della più salda tempra filosofica, come un Gauss, benchè in prima linea geodeta e astronomo, un Cauchy, un Riemann, un Cantor, un Weierstrass, un Poincarè; logisti come W. R. Hamilton, Bertrand Russel, Peano; fisici come Maxwell, Helmholtz; psicologi come Mach, ecc. Tutti hanno, ad ogni modo, inteso il pensiero matematico come compiutamente isolabile, svincolato da rela-

zioni e condizioni estrinseche, obbediente nel suo sviluppo alla sola propulsione di leggi e processi suoi propri ; tutti hanno creduto possibile, anzi necessario, lo svolgimento di un pensiero matematico assoluto, e, in tale assolutezza, privo di, qualsiasi significato non semplicemente matematico.

Aggiungiamo che questo senso di autonomia si è trasferito, per non pochi, dalla matematica in generale a singole sue discipline : abbiamo avuto, cioè, analisti puri, geometri puri, aritmetisti puri. . ; ciascuno persuaso della assoluta preminenza o generalizzabilità o persino isolabilità del proprio complesso teorico. Basti ricordare, fra gli analisti Cauchy e la sua scuola in Francia, George Peacock e la sua scuola in Inghilterra ; fra i geometri Monge, Dupin, Poncelet, Jacob Steiner, Chasles, v. Staudt, Cayley ; fra gli aritmetisti Weierstrass, Kronecker.

È d'uopo però riconoscere, che se questi momenti di distinzione e di specificazione

hanno giovato ad approfondire il pensiero matematico in talune direzioni ; lo spirito di unità ha ripreso con maggiore o minore successo i suoi sforzi per conquistare mediante una nuova generalizzazione, una sintesi superiore.

* * *

In vari modi è stato tentato di descrivere l'incremento davvero prodigioso, che la moderna matematica ha conseguito.

A me sembra che si possa ricondurre la grande ricchezza e varietà dei suoi sviluppi, principalmente a due ordini di processi mentali distinti, che hanno una certa analogia, e forse una non lontana parentela, coi due indirizzi, *formale* l'uno, *reale* l'altro, della logica contemporanea.

L'un processo si può caratterizzare come uno sviluppo autoctono e integratore, tendente a soddisfare, per lo più, a condizioni e ragioni di coerenza e di sistema.

Ed ha agito in due sensi :

1° accrescere gli enti matematici, come per un incremento organico del pensiero, *ab intra*, derivandoli dalla stessa ragion matematica ;

2° perfezionare la compattezza e il rigore dei principi, delle dimostrazioni e delle applicazioni, mediante continue revisioni logiche e sistematiche.

L'altro processo consiste in un aumento di enti matematici derivati da nuovi apporti intuizionali. Questo aumento *ab extra* si compie, cioè, colf'assumere nella sfera del calcolo nuovi elementi, i quali traducono in concetti matematici dati dell'intuizione sensibile, fatti fisici, primieramente non considerati come oggetto proprio del pensiero matematico.

* * *

Esaminiamo più da vicino il primo processo.

Esso ha avuto precipuamente sede tanto nell'analisi, quanto nelle geometrie (di si-

tuazione, metriche e proiettiva), quanto infine negli sforzi solidali compiuti nei due campi per raggiungere generalizzazioni superiori all'uno e all'altro, perfezionando, con inversioni complete, il parallelismo analitico geometrico inaugurato da Fermat e da Cartesio.

Senza indugiarcì in particolari, noi possiamo accordarci rapidamente nel riconoscere come accrescimenti interni, idiogenetici, del pensiero matematico :

1° la scoperta dell'*unità imaginaria* e dei *numeri complessi*, che aggiungendosi alla serie dei numeri interi, frazionari, positivi, negativi e irrazionali, veniva a completare, mediante una nuova simmetria, quasi una seconda dimensione, il sistema dei numeri e delle quantità. Tale scoperta doveva fruttificare non solo per la teoria generale dei numeri, coi lavori di Caspar Wessel, del Buée, dell'Argand ; e non solo per la teoria generale delle serie e per la teoria generale delle equazioni, col Gauss

in Germania, con l'Abel in Norvegia, col Cauchy in Francia, con Augustus De Morgan e più tardi con W. R. Hamilton in Inghilterra; ma essa apriva l'adito a nuove concezioni geometriche, con l'introduzione di parametri imaginari nel continuo spaziale (Gauss, Bolyai, Lobatchevski, ecc.).

2° La scoperta di geometrie metriche a n dimensioni. Procedendo dalla impossibilità di dimostrare il V postulato delle parallele su basi euclidee, malgrado gli sforzi asseriti vittoriosi di Saccheri e di Lambert, il pensiero si sollevava, come per un impeto di coerenza, alla nozione di spazi curvi e d'*iperspazi*, formanti alla fin fine con lo spazio euclideo un continuo superiore. Alla geometria si aggiungeva la metageometria (Gauss, Bolyai, Lobatchevski, Riemann, Beltrami, ecc.).

3° L'invenzione della geometria proiettiva (Gergonne, Monge, Poncelet, J. Steiner, Chasles, v. Staudt, Cayley, ecc.), e della geometria di situazione o topologia

(Listing, Riemann) ; le quali riuscivano ad isolare e a descrivere proprietà geometriche pure (di ordine, di posizione e di costruzione), originariamente non affatto rilevate o confuse fra loro e con proprietà metriche. Movendo dal principio di dualità del Gergonne e dal principio di omologia e di reciprocità del Poncelet, si perveniva, non solo a costituire una geometria indipendente dall'analisi, ma fino a tentare di dare una definizione puramente geometrica di *distanza* e di interpretare proiettivamente le stesse geometrie metriche (Cayley, « *all geometry is projectiv geometry* ») ; e a dare una interpretazione puramente geometrica del numero e fin dell'immaginaria (v. Staudt, il quale riprendeva l'analoga, stabilita dal Poncelet, dei punti e delle linee *ideali* della geometria proiettiva con le quantità *imaginarie* o *complexes*).

4° I progressi enormi del *calcolo*, nelle sue inesauribili espansioni e nei suoi

più rigorosi perfezionamenti ; e principalmente :

a) del *calcolo infinitesimale*, con la riforma iniziata dal Cauchy, e dalla sua celebre scuola di Parigi ;

b) della *teoria generale delle funzioni*, che, riesaminata separatamente dall'Abel e dal Jacobi, indi dal Cayley e da numerosi altri, si accresceva sino a dar corpo a tutta una nuova branca della matematica superiore ;

c) della teoria del *continuo* e dell'*infinito*, già sottoposte a revisione dal Gauss e da molti altri, ma condotte a un nuovo progresso da Bernardo Bolzano e da Giorgio Cantor, il quale ultimo con le sue risoluzioni dei *paradossi dell'infinito* del Bolzano, con la sua teoria deg'*insiemi* e col concetto di *transfinito*, si metteva a capo di quell'indirizzo della matematica superiore, che da lui prende nome di *cantorismo*.

5° La *teoria generale delle equazioni* e la *teoria delle forme algebriche* (Gauss, Abel,

Galois ; Sylvester, Salmon, ecc.) con cui si raggiungeva la più alta generalizzazione in algebra e si preparava la più progredita *teoria dei gruppi*.

6° La *teoria dei gruppi* o dei *gruppi di trasformazioni*. Accennata già nel concetto d'*invariante* (ch'era stato rilevato dal Poncelet nelle proprietà proiettive, adottato e sviluppato a preferenza dalla scuola inglese di Boole, Cayley, Sylvester, Salmon, e diffuso largamente in Italia dal Brioschi, che tradusse le *Lessons* del Salmon) ; preparata nella *teoria delle forme*, dello stesso Sylvester, e inoltre dalla generalizzazione del concetto di *coordinate*, che Plücker compiva, congiungendo in un più alto grado di reciproca compenetrazione il metodo analitico e il descrittivo ; veniva a maturità la *teoria delle sostituzioni* di Galois, Camille Jordan, ecc. ; ed infine, col Möbius, col Sophus Lie, col Klein e numerosi altri, la più generale teoria che sinora si conosca delle *trasformazioni* e

corrispondenze, o teoria dei gruppi di trasformazioni. Si conquistava così una delle più poderose sintesi della matematica contemporanea. Per essa si rendeva completo il parallelismo geometrico analitico; Klein poteva ridurre il problema dello spazio a un problema di trasformazioni (quali proprietà geometriche restano *invarianti* in rapporto a un certo gruppo); e Poincaré poteva affermare il *principio di equivalenza* di tutte le geometrie e la *teoria della convenzione*.

7° Il *calcolo differenziale assoluto*, sintesi ancora più progredita, dovuta al Cristoffel ed ai nostri grandi matematici Ricci-Curbastro e T. Levi-Civita, nella quale si utilizzano, insieme con altri concetti, di cui diremo più avanti, i perfezionamenti raggiunti nei concetti di *invariante* e di *gruppo*, e si supera la dipendenza da un sistema privilegiato, di coordinate.

8° La *teoria dei determinanti*, la quale, sebbene di minore importanza rispetto alle

precedenti, è tipica come esempio di perfezionamento autonomo dei processi matematici. Infatti, col concetto di *determinanti*, che può farsi risalire a Leibniz, e col *calcolo di operazioni*, specie di *algebra dell'algebra* o *algebra abbreviata*, che se ne sviluppa, e che permette di trattare come quantità operazioni algebriche e i loro simboli, si dà al pensiero matematico un nuovo e notevole strumento, sì per l'aritmetica (Gauss, Cauchy, Hermite, Cayley, Sylvester), e sì per la geometria (Jacobi, Otto Hesse, ecc.).

* * *

Ma a parte queste ed altre minori invenzioni e conquiste autoctone, v'è ancora da segnalare tutto un incessante lavoro collaterale di raffinamento e di perfezionamento llogico, quell'intimo travaglio, cui abbiamo accennato, per conseguire il massimo rigore, la massima compattezza nel sistema

dei principi e delle conseguenze. Nessun'altra disciplina ha tanto sacrificato all'ideale della coerenza.

È stato tutto un continuo riesame, una continua revisione critica, uno sforzo inesausto di costituire le nuove e le antiche teorie matematiche in un corpo di dottrine perfettamente connesse fra loro; onde il Klein ha potuto dire, che « noi viviamo in un periodo critico simile a quello di Euclide ».

Ciascuna generazione di matematici ha dovuto preoccuparsi, anche per effetto delle proprie nuove conquiste, di rivedere i fondamenti e di ristabilire la maggiore possibile coesione della scienza matematica. Rivedono i fondamenti già all'inizio del secolo XIX Gauss e Cauchy, Peacock e Galois, e li rivedono anche Abel e Jacobi: e tornano a rivederli Jacob Steiner e Plücker e Chasles ed Hankel; ma ancora di nuovo Grassmann e Pasch e Riemann; ed inoltre Weierstrass, che inaugura « l'era

del rigore », ed Helmholtz e P. Du Bois-Reymond e Poincaré; e inoltre ancora quasi tutti i nostri matematici, Peano e la sua scuola (Vailati, Vacca, Padoa, Pieri), e Giuseppe Veronese, e Federigo Enriques. . . Gl'Italiani specialmente sono stati attratti dal problema della logica della matematica, oltre che da quella più particolare disciplina, che da essi ha ricevuto il nome di logica matematica.

Brevemente possiamo dire che in più modi, e, se non erro, con quattro diversi procedimenti si è tentato di raggiungere l'unità logica.

1° Procedimento: introdurre nuovi principi dimostrativi, per es. il *principio di simmetria* e di *omogeneità* di Gauss, ed altri.

2° Procedimento: rendere *esplicite* le definizioni *implicite*, individuate già da Gergonne e rese tutte esplicite, per es., da Moritz Pasch in una compiuta analisi della geometria, considerata come un corpo di

relazioni meramente logiche e ricostituita in un rigoroso sistema deduttivo; oppure definite tutte mediante l'uso sistematico dell'*induzione completa*, come han fatto nella fondazione dell'aritmetica H. Grassman, G. Peano e S. Peirce.

3° Procedimento: lasciare invece nella *indeterminazione* le definizioni iniziali degli enti, ritenendo tutte quelle, a volontà, che siano egualmente compatibili (secondo l'insegnamento memorabile di Plücker intorno all'*elemento generatore* dello spazio, ch'egli proponeva di stabilire a scelta in più modi — *principio d'indeterminazione* —); e costituire la matematica in un *sistema ipotetico-deduttivo*, facendone, cioè, una scienza *formale* o dell'*ordine*, in tutto simile alla logica: e quindi trattandola come un sistema di *relazioni* o di *proposizioni funzionali*, capaci di assumere significati particolari diversi (Russel, Pieri, David Hilbert).

4° Procedimento: semplificare addi-

rittura, là dove non si riusciva ad abbracciare e a dominare la troppo discorde e ribelle molteplicità di elementi e postulati. A questo si deve quell'*arimetizzazione della matematica*, e principalmente dell'*analisi*, con cui si torna al concetto semplice di numero intero positivo, si direbbe, al concetto pitagorico di numero naturale (Weierstrass, Kronecker, Méray. . .), e se ne fa il fondamento per l'interpretazione di tutti i concetti matematici, financo dei numeri irrazionali — tentativo questo, che ha in seguito un curioso riscontro con la teoria dei *quanta* in fisica — ; e che viene spinto dai più zelanti (Kronecker) sino alle ultime conseguenze, cioè fino a rinunciare a ogni concetto dinamico o funzionale delle quantità, all'uso dei numeri irrazionali e complessi, ed a restringersi ad operare con soli numeri interi positivi e con le loro relazioni aritmetiche elementari, pur di dare all'intero procedimento matematico unità e rigore.

* * *

Il secondo processo, al quale noi abbiamo accennato, di nuove immistioni di elementi intuizionali, non è affatto nuovo nella storia delle matematiche.

A parte l'origine empirica, dai più affermata, degli elementi assunti come originari, e nei quali noi non abbiamo difficoltà a vedere, con l'Enriques, riflessa « una pressione generale dell'esperienza, elaborata traverso una lunga evoluzione mentale »; egli è certo che i moderni più notevoli progressi della matematica sono dovuti alla *matematizzazione* di nuovi dati dell'intuizione, cioè di fatti fisici matematicamente trasfigurati.

Ciò era senza alcun dubbio avvenuto alle origini del *calcolo differenziale e integrale*, quando sì Leibniz, che Newton foggiano il concetto di *flussione* o di *funzione*, come poi si disse, su modelli tolti alla dinamica e più specialmente alla cinematica,

per es. punti senza massa in movimento continuo con velocità variabile.

Questo processo di stilizzazione matematica di dati empirici giustifica per l'appunto la felice immagine dell'Huxley, che « la matematica può essere paragonata a un mulino di squisita perfezione, il quale macina a qualsiasi grado di finezza, ma da cui, beninteso, ciò che voi ricavate dipende da quello che vi mettete dentro ».

I nuovi enti e procedimenti matematici, che nel periodo da noi esaminato si sono venuti aggiungendo ai primi, sotto il dettato dell'intuizione sensibile, sono, a mio giudizio, questi :

1° le *curve di Gauss*, fondamento della nuova nozione di superficie curva e di spazio metrico in senso largo ; metodo di rappresentazione notoriamente suggeritogli da problemi geodetici nella formazione della mappa catastale dell'Hannover ;

2° il concetto di *algebra a più unità* e in particolare di *quaternione*, introdotto

da W. R. Hamilton e originariamente da lui usato nella trigonometria sferica; ma in seguito, cioè dopo la riesumazione fattane dall' Hankel e l'applicazione eseguitane da Clerk-Maxwell, assai più largamente adoperato. Per esso gli elementi geometrici hanno non soltanto dimensione, ma *direzione* — « vettori » — e si adoperano dei moltiplicatori — « operatori » — capaci di modificare non soltanto la grandezza, ma la direzione;

3° la generalizzazione geometrica del concetto di « potenziale » o di « funzione potenziale », già formulato da George Green e poi dal Gauss; e che secondo l'interpretazione del Klein, è (invece del principio di Dirichlet) il viro punto di partenza dell'intera riforma matematica del Riemann e delle invenzioni geometriche di lui (geometria infinitesimale, superficie di Riemann, ecc.);

4° il concetto di *tensore*, onde il vettore acquista *intensità*; anch'esso derivato dal principio di eguale distribuzione dell'ener-

gia (calore, elettricità) in un campo di forza; e uno dei fondamenti del nuovo calcolo differenziale assoluto. A tale proprietà dell'elemento geometrico il Weil ha oggi aggiunte quelle di *spessore*, *densità*, *peso* ecc.; per modo che il nuovo calcolo ha acquistati tutti i caratteri di una *fisica astratta*, direi, è divenuto una *fisica sublime*, capace di formulare, benchè in linea soltanto ipotetica, gli schemi universali di qualsiasi dinamismo naturale. Si aggiunga che in questa astrattissima fisica matematica, mediante l'impiego di *covarianti* (vorrei proporre di chiamarle più italianamente *convarianti*) e *contravarianti*, di *cogredienti* e *contragredienti*, si supera la dipendenza da un sistema particolare di riferimenti, e si esprimono relazioni funzionali valide per qualsiasi sistema di coordinate.

* * *

Eleviamoci ora per un poco a una visione panoramica di tutto questo immenso e vario lavoro, parte d'invenzione, parte di

perfezionamento, parte di sistemazione, al quale il filosofo guarda con emozione e con rispetto. Egli è certo che il regime di perfetta autonomia ha permesso alla moderna matematica di svilupparsi liberamente in molti nuovi sensi, esente da ogni obbligo di riferimenti o di verificazioni estrinseche; di evolvere, senza impacci di sorta, da sistema di relazioni di quantità e grandezze, a sistema di quantità e grandezze di relazioni qualitative e d'ordine; di lavorare persino di fantasia, di annettere ai propri problemi anche un semplice interesse estetico.

Un tale senso di libertà logica ed insieme estetica si prova, per es., quando, col *principio d'indeterminazione* il Plücker insegna a trattare come *punti* i cerchi di un piano e come classi di punti il sistema dei cerchi, e insomma a dedurre in più modi, a scelta, il punto come *ente secondario*; o quando Chasles pone le proprietà delle figure di uno spazio finito in costante

correlazione coi loro elementi immaginari o situati all'infinito.

Lo stesso si dica di tutto quell'immane lavoro compiuto per ridurre la matematica a un semplice *sistema logico formale*, fra enti liberamente definibili; sistema al quale si riferiva Bertrand Russel, quando, fra il serio ed il faceto, diceva che « la matematica è una scienza in cui non si sa di che si parla, nè se ciò che si dice è vero ».

Tuttavia non v'è alcun dubbio che in questo stato di libertà e d'indeterminazione la matematica ha potuto spezzare definitivamente tutti i vincoli ontologici, e nel tempo stesso elaborare, con un più franco spirito inventivo, nuovi schemi concettuali, nuovi principi, nuovi procedimenti, con cui si è accresciuta la varietà, la potenza e la coesione del pensiero matematico, non solo; ma di cui si è pure, di rimando, avvantaggiata la ricerca scientifica positiva. Così, per esempio, la più alta sintesi raggiunta nel parallelismo analitico geometrico

ha consentito alla meccanica di servirsi di sistemi di riferimenti a più di tre dimensioni per problemi che comportano più di quattro gradi di libertà ; ed ha consentito alla stereochimica di farne un analogo impiego nelle proprie formule, là dove il limitarsi a tre sole coordinate arrecherebbe complicazione, anzichè semplicità. Così pure lo sviluppo delle geometrie metriche e del calcolo tensoriale non solo preparava la matematica ad accogliere la novissima fisica, ma aiutava questa a costituirsi.

Oltre a ciò, in un senso ancora più generale noi vediamo rifluire dal campo matematico verso il più vasto mondo scientifico e filosofico e financo pratico, concetti e schemi, che vi acquistano una importanza crescente e giustificano con la loro fecondità il proprio intervento.

Ciò si dica, per es., dei concetti di *serie* e di *funzione*, oggi così largamente applicati nelle sintesi delle vicende, dalla fisica e dalla chimica alla psicologia, alla nuova

teoria dei valori, alla statistica, all'attualismo. Il concetto di funzione in ispecial modo, può considerarsi come il primo tentacolo dell'*analisi*, nello sforzo di provare in tutte le direzioni la sua onnipotenza.

Più evidenti sono i nessi tra la nuova matematica e la riforma logica, oggi posti dall'Enriques in piena luce. Nè io so persuadermi perchè si tardi tanto a definire i *concetti generali* come funzioni a una o a più variabili, aventi ciascuna un proprio limite (com'ebbi già a porre nel mio studio su « Le idee generali »).

* * *

D'altro lato non possiamo a meno di constatare che, malgrado tutti gli sforzi ognora ripresi, sforzi meritori, commoventi, ma disperati, per ripristinare l'unità del sistema, l'antica beata *unità* del modello matematico non esiste più. La parola *matematica* non è oggi che un *nome collettivo*.

L'antico modello, di un congegno perfetto di assiomi, definizioni e postulati, connessi fra loro in un ordine deduttivo esatto, invidiato dalle altre scienze e tante volte preso ad esempio dalla stessa filosofia, vale appena, e condizionatamente, per le singole discipline e, per queste, nel loro sistema interno soltanto; ma per l'intero sistema del pensiero matematico, non è più che un ricordo.

Invece noi filosofi ci si chiedeva: come fare della filosofia una scienza tanto esatta quanto la matematica? È il problema di Cartesio, il quale traccia il suo *metodo* sul modello matematico e riesce a comporre un suo sistema, ponendovi in cima assiomi assolutamente evidenti, e da quello procedendo, con rigore, per via di definizioni e postulati. Fin dell'esistenza di Dio egli sa dare una dimostrazione *more geometrico*. Poi è Spinoza che edifica tutta una filosofia della sostanza, la sua *Ethica, more geometrico demonstrata*. Analogo modello ha presente

Leibniz nella sua prodigiosa risoluzione di ciascun composto nel semplice, nella sua ricerca degli elementi infinitesimali del mondo, nel grandioso progetto di una *characteristica universalis*, che doveva esprimere matematicamente le idee semplici e tutte le loro relazioni possibili. E fin Kant si propone il problema stesso di Cartesio e si lusinga di avere finalmente gettate le basi di ogni futura *scienza a priori* del reale (di ogni *metafisica* futura, com'egli la chiama), basi altrettanto *a priori*, altrettanto necessarie e universali quanto quelle della matematica, salvo il carattere intuitivo e apodittico di quest'ultima, che può costruirsi da sola il proprio oggetto, e il carattere fatalmente assertorio e discorsivo della prima, per l'inevitabile intervento dello schematismo del tempo pur nelle forme *a priori* dell'esperienza.

Oggi del vecchio modello teorico *ancien régime*, assiomatico e deduttivo, unitario, assoluto, cui erano state attribuite financo

proprietà soprasensibili, origini trascendenti e divine, non c'è più vestigio.

Il sistema, l'interna coesione, la dimostrabilità logica sono ormai una costruzione e una conquista personale (Enriques). Così per esempio, in geometria Plücker considera come elemento primario le linee, e come ente secondario il punto; Peano tratta come proposizioni prime le nozioni di *punto* e di *segmento*; Pieri quelle di *punto* e di *movimento*; Padoa quelle di *punto* e *distanza di due punti*; Veblen le nozioni di *punto* e di *ordine*; mentre David Hilbert ha bisogno dei concetti di *punto*, *retta*, *piano*, *situato su*, *situato tra*, *parallele*; tutti poi ne derivano le stesse proposizioni. Ciascun matematico deve, infine, formarsi il suo sistema, ed è estremamente raro trovare due matematici che proprio su questo punto fondamentale vadano d'accordo fra loro; tale e quale come i filosofi. La matematica presenta e presenterà ancor più in avvenire lo stesso processo di continui ripensamenti, di svol-

gimenti multipli, di progressi particolari, di tentativi — tutti necessariamente provvisori — di ricostruzioni sistematiche e di sintesi generali necessariamente caduche; come in più vasta scala la filosofia.

E vi sarà più vitalità, più promessa di crescita, nel sorgere di nuovi problemi, nella capacità che certe dottrine particolari dimostreranno, pur fra inevitabili contraddizioni, di fruttificare, anche in campi apparentemente remoti; nella possibilità di far progredire mediante sintesi parziali più branche alla volta, trascurando, se occorra, le altre; anziché nell'illusione beatifica di aver raggiunta l'unità per via di semplificazione dei concetti generali.

Un esempio di questo ci offrono oggi le tre geometrie di situazione, o *analysis situs*, metrica e proiettiva, le quali studiano separatamente tre classi di proprietà, qualitative o d'ordine, analitiche e proiettive, che erano state promiscuamente adombrate nella geometria elementare, e rispetto

alle quali, invece, il criterio di *eguaglianza* assume un contenuto, dall'una all'altra geometria, essenzialmente diverso.

Or queste tre classi di proprietà, noi possiamo ordinare secondo una gerarchia di generalità decrescente e di crescente specificazione, movendo da quelle di posizione, per passare alle proiettive e da queste alle metriche. Possiamo anche formalmente subsumerle tutte sotto un gruppo di trasformazione più generale ancora. In realtà essi ci presentano immagini di continui spaziali eterogenei, tanto che s'è tentato di ricondurle finanche ad una *psicogenesi* diversa (Enriques).

Così mentre per la geometria di situazione, ch'è dominata dal principio di continuità, lo spazio è un continuo amorfo, in cui ogni rigidità degli enti geometrici si dissolve; per la geometria proiettiva lo spazio si risolve in una molteplicità di rette intersecantisi fra loro, senza più rigidità di angoli e senza più parallelismo; e nella geometria

metrica tutto lo spazio è fatto di figure indeformabili, obbedienti al principio di Helmholtz della libertà di movimento.

Or è proprio in questa crescente differenziazione e nella persistente molteplicità, nel fermento del diverso e fin del contraddittorio, che è la garanzia dell'ulteriore progresso del pensiero matematico, proprio come di ogni altra scienza, e come della filosofia stessa.

* * *

Vogliamo ora chiederci: Se la matematica moderna ha indubbiamente conseguiti immensi progressi nell'epoca del suo distacco dalla filosofia e dalle scienze particolari; tale situazione, specialmente nei riguardi della filosofia, non le ha anche nociuto? e non le nuocerebbe se indefinitamente protratto e radicalmente eseguito?

Intendiamoci bene. V'è, come notammo, nelle scienze matematiche una lor propria nativa e specifica autonomia di principi e di

metodi, felicemente asserita e definitiva-
mente acquisita, onde scaturisce all'interno
del sistema quello che si potrebbe chiamare
l'assoluto matematico.

Di essa non si tratta. Tuttavia non si
deve confondere questa autonomia interna
con l'isolamento *positivo e critico*.

Nei riguardi delle scienze positive l'iso-
lamento, a dir vero, non è stato mai com-
pleto. Nè ha mai nociuto alla matematica,
nel suo stesso lavoro teoretico *puro*, se sia
stata sollecitata da problemi propositi,
ad es. dalla astronomia, dalla fisica, dalla
statistica o persino da scopi pratici. La sto-
ria della matematica, ed anche la più re-
cente, sta lì a provarlo. Il principio della
scomposizione della circonferenza, e quindi
di una curva qualsiasi, in una infinità di
triangoli, aventi ciascuno per base un punto
della curva e per vertice il centro, principio
che doveva riuscire così fecondo per la
matematica infinitesimale, fu rinvenuto da
Keplero esaminando il problema della forma

corrispondente alla massima capacità delle botti di vino (*Nova stereometria doliorum vinariorum*, 1615).

Certo è ben giustificata la tendenza *realistica* e *positiva*, che sempre din uovo risorge nel campo matematico, in opposizione alla formalistica; tendenze felicemente descritte nel dialogo fra l'idealista e l'empirista di Paolo Du Bois Reymond (*Trattato generale delle funzioni*).

Ma l'isolamento *critico*, lo *splendido isolamento* in cui la matematica si contiene verso la filosofia, non può che nuocerle, e le ha nociuto in verità. Essa lo ha scontato con talune sue deficienze critiche e sistematiche, che curiosamente sopravvivono ai suoi stessi progressi.

Accennerò per brevità a tre soli punti, che mi sembrano sufficientemente probanti e istruttivi.

1° Per secoli si è detto e ripetuto e ancor oggi si ripete, che la matematica è una *scienza deduttiva*. E non solo così si è detto,

ma si sono spese energie mentali senza fine per trovare lo schema perfetto dell'ordine *assiomatico-deduttivo* prima, *ipotetico-deduttivo* oggi.

Deduttivo, perchè? Vi sono forse proposizioni generali, da cui si deducano proposizioni particolari? Nulla di tutto ciò. Se così parlando, ci riferiamo agli *enti*, e a concetti di *classe* che li comprendano, quasi fossero *individui logici*; dobbiamo obiettare che oggi il concetto di *classe* in matematica non può avere altro significato all'infuori di quello, *estensivamente* e non *intensivamente* stabilito, di complesso di proprietà *invarianti* o *convarianti* in rapporto a un gruppo dato. Se poi ci riferiamo, non agli enti, ma alle *relazioni* fra gli enti, come per es. negli assiomi dell'eguaglianza e della diseguaglianza, queste relazioni non sono neppure *general*i, ma sono *costanti* e costanti nell'ambito di un sistema dato. Or le relazioni costanti sono anch'esse delle *invarianti*, che si verificano identicamente in ogni

caso ; non già relazioni che stiano alle singole presentazioni come il generale sta al particolare.

L'ossessione del procedimento *deduttivo* la matematica l'ha ereditata dalla logica tradizionale, aristotelico-scolastica ; quindi, voi direte, dalla filosofia. Cio è vero ; con questa differenza, che la filosofia se n'è liberata, e la matematica, per non avere partecipato del travaglio critico della filosofia, v'è rimasta attaccata, pur avendo essa fornito uno dei massimi argomenti, per affrancare il pensiero dalla millenaria soggezione aristotelica. Ma questo ristagno concettuale le ha lungamente impedito di riconoscere il carattere *sintetico-costruttivo* dei suoi enti, i quali sono un prodotto di *giudizi sintetici*, come Leibniz e Kant esattamente videro — salvo che ne stabilirono, sbagliando, un'origine *a priori* —. E le ha pure impedito di accorgersi del carattere *analitico* e *combinatorio*, in senso logico, delle dimostrazioni dei teoremi, e

delle risoluzioni dei problemi. Sia data la costruzione o sintesi spaziale: triangolo. Mettiamo ora in evidenza, per via di teoremi e di problemi, tutte le proprietà che sono già racchiuse, implicate e condeterminate nella sintesi data. E dov'è qui la deduzione? Qui non v'è che svolgimento *analitico* e *combinatorio*; cioè tutto un contesto di giudizi analitici, e tali, perchè non aggiungono assolutamente nulla a quello che è compreso già nella sintesi originaria.

Nè si pensi che è questione di termini, di parole, ma è di procedimento intrinseco.

La matematica s'è immobilizzata per lunghi secoli nell'ammissione di assiomi fondamentali evidenti per se stessi e come tali indimostrabili. Oggi non ripete più l'errore, avendo constatato che certi assiomi — quale ad es. quello della disuguaglianza valgono, non assolutamente, ma condizionatamente. Così, il tutto è maggiore della parte nel caso di enti finiti; può

essere uguale alla parte nel caso dell'infinito (Galilei, Cantor).

Ma a questo risultato sarebbe giunta più rapidamente, e ancora oggi non ricadrebbe nelle vecchie posizioni, se avesse accettato risolutamente la nozione di *sistema sintetico-costruttivo*, in cui la dimostrazione si fa, non secondo la gerarchia aristotelica dei concetti, dall'alto in basso, dal generale al particolare, e neppure inversamente, ma *da ogni punto verso ogni punto*. Non è vero che gli assiomi siano indimostrabili o indimostrati. Assiomi, postulati, teoremi, problemi, ecc. non hanno senso, finchè non si definisce il *sistema*, nel quale si pongono. Gli assiomi sono anch'essi *invarianti*, le quali fanno parte integrante del sistema in cui sono poste, e *sono verificate da tutto il sistema*. Un sistema è un tutto logico, che o si dimostra *per intero* o non si dimostra affatto. E il procedimento della dimostrazione è appunto quello *analitico-combinatorio* sopra indicato.

2° La matematica si è tormentata sin dal suo primo sorgere e fino ai nostri giorni nel cercare di definire i propri elementi. Oggi prepondera, diremmo quasi è di moda, il *principio d'indeterminazione*; risoluzione disperata; se non vuol già dire che tutta la varietà di definizioni *compatibili* possa ritenersi implicata nel sistema delle relazioni definite. Ma ciò ha provocato, come s'è visto, la vivace reazione degli aritmetisti, che non rinunciano a definire il concetto *elementare* di quantità e di numero.

Or la matematica, in questa ricerca di *elementi*, è prigioniera, senza accorgersene, di una certa filosofia arcaica, per quanto varie volte e sotto vari aspetti ricorrente nella storia del pensiero; secondo la quale la ragione del *composto* si deve trovare nelle proprietà del *semplice*. Simplex sigillum veri! Così nulla sembra più evidente che risolvere i solidi in superfici, le superfici in linee, le linee in punti, e considerare questi, o da soli, o in congiunzione con altri ele-

menti, per es. il segmento, come la radice di tutto. Messi su questa via, si comprende come sia ardua impresa, sempre fallita e sempre di nuovo invano ritentata, di definire ciascun elemento in sè e per sè: il punto, la linea, la retta!...

Alla stessa concezione obbediscono i tentativi di spiegare geneticamente le forme geometriche ; il punto movendosi nello spazio genera una linea, la linea movendosi genera una superficie, la superficie movendosi genera un solido. E non ci si accorge, che se un punto, o una linea, o una superficie si muovono, generano un bel niente, e solo assumono differenti posizioni in uno spazio ideale..., senza del quale, del resto, essi non potrebbero neppure concepirsi.

Per riparare all'evidente impossibilità si suole aggiungere che il punto, la linea, la superficie, per generare... debbono muoversi *lasciando tracce*. Ma il rimedio è peggiore del male, poichè è fin troppo chiaro, che in tal modo si viene a decidere un pro-

blema di concetti con un appello all'intuizione sensibile, cioè spostandolo dalla sua vera sede. E qui dovremmo ricordare quel che Karl Weierstrass e, fra noi, Ulisse Dini dissero contro l'evidenza *visiva* (intuitiva) in matematica. Insomma, codeste « venerande lumache » per lasciar tracce, dovrebbero superare l'abisso concettuale che separa l'uno dal molteplice, il discontinuo dal continuo, il finito dall'infinito.

Se la matematica si fosse liberata della concezione arcaica degli *elementi* — come già se n'è, se Dio vuole, affrancata la filosofia —, si sarebbe già accorta che era impossibile definire, per es., gli elementi geometrici, *indipendentemente* dalla nozione di spazio a cui appartengono e dalla costituzione di questo spazio. La retta è indefinibile finchè si prescinde da uno spazio euclideo, che ne determina, esso, le proprietà. In spazi altrimenti costituiti sarà la geodetica che potrà prendere il posto della linea di più breve congiunzione fra due punti e la retta

può diventare, come nel piano di Minkowski, « il più lungo cammino fra due punti » (Castelnuovo).

Torna a imporsi il concetto di *sistema*, a cui abbiamo accennato poco fa : ed al quale bisogna riferirsi, e senza del quale non è possibile *costruire* nessun elemento, nè definirlo, nè dimostrarlo.

3° Un'enorme somma di lavoro è stata spesa da matematici inglesi, francesi, italiani intorno a una certa logica simbolica, alla formazione di un linguaggio ideografico, avente il rigore del procedimento matematico, per esprimere tutte le relazioni possibili, cioè tutte le possibili proposizioni e i possibili giudizi, sì logici, che matematici.

Or quella ricerca, legittima finchè si tratti di trovare *principi più generali*, comuni alla logica e alla matematica (come nell'*Universal Algebra* di Whitehead o nell'*Algebra der Logik* di E. Schröder) ; quando invece pretende di assumere significato realistico, obbedisce a una ispirazione filosofica da

chi ?

gran pezza tramontata nel nostro campo ;
 l'ammissione cioè, che Leibniz ereditava
 da Raimondo Lullo e da altri : doversi e
 potersi ricercare delle *idee semplici* come
 elementi costitutivi sì del pensiero e sì
 della realtà, idee nelle quali si risolvereb-
 pero e dalla cui combinazione si formereb-
 bere tutte le idee composte e, nel mondo,
 tutti i composti.

Questa specie di alchimia concettuale,
 logico-matematico-ontologica, cui si col-
 legano la *logica delle relazioni* del Russell,
 il realismo logico-matematico del Peano,
 ecc. . . è tutta dominata da un problema
 bandito dalla filosofia, come uno pseudo-
 problema, benchè seduca ancor oggi ed oc-
 cupi la mente di non pochi e autorevoli
 matematici.

Il trasferimento proposto dall'Enriques,
 di tali sistemi di relazioni, da concetti esten-
 sivamente presi a concetti intensivamente
 stabiliti, di « individui logici » anch'essi sem-
 plici e invariabili, è una ingegnosa solu-

zione, purchè prescindiamo da ogni pretesa di applicazioni ; altrimenti ricadremmo nell'ontologismo arcaico degli elementi.

* * *

Concludiamo.

Il distacco della matematica dalla filosofia s'è compiuto in un momento quanto mai drammatico della storia del pensiero umano. Davanti alla critica Kantiana crollavano tanto il razionalismo metafisico, quanto l'empirismo, cioè quelle due grandi filosofie, egualmente dogmatiche, le quali avevano alimentato e sorretto con pari fede il rinnovato ontologismo platonico-aristotelico, cioè il postulato ingenuo di una innata immancabile provvidenziale corrispondenza fra pensiero e realtà. Su questo ontologismo riposava la matematica, di stile, diciamo così, pur sempre *pitagorico*, ancorchè rifatta da un Cartesio, da un Leibniz, da un Newton ; anzi ne diveniva, a sua volta, il principale sostegno. Ma ecco che Kant demoliva l'ontologismo trascendentale, e isolava il

fatto matematico in una singolare situazione, privilegiata sì, ma non più amalgamabile con quella di alcun'altra disciplina, neanche con la fisica.

Si può dire che di questa situazione abbia la matematica approfittato, per non obbedire oramai che alle proprie ispirazioni e leggi, prescindendo nei suoi sviluppi così dalle mutevoli costruzioni filosofiche, come dalla storia fisica e naturale delle vicende.

E fu sano istinto, al quale essa deve le sue più ardue e audaci e originali conquiste.

Ma dai suoi stessi accrescimenti tropicali, dal suo stesso ardore di sintesi, dal suo bisogno di unità e di sistema, ognora inappagato e in modo definitivo non mai più appagabile, la matematica è stata sospinta verso una fase critica, dalla quale ha avuto più volte l'illusione di uscire, ma non potrà uscire mai più. Toltasi dalla sua, del resto apparente, immobilità secolare tradizionale, essa è ormai avviluppata nelle spire della *crisi perenne* del pensiero umano.

E rimane, come la filosofia, legata al pesante carro del divenire storico e collettivo degli spiriti; divenire faticoso, multiplo e discontinuo. che ha avanzate e ritorni, cadute e impeti, orientamenti felici e deviazioni e smarrimenti, esperienze, egualmente preziose e forse egualmente necessarie, della verità e dell'errore.

Ma in questa rude fatica la matematica non potrà senza danno isolare i suoi sforzi dalla filosofia (già la stessa coscienza della crisi è una coscienza di genere filosofico); come non potrà da essa isolarsi certo neanche la filosofia; poichè lo spirito è impegnato tutto, nella totalità delle sue risorse, alla conquista di sintesi provvisorie, sì, ma ognora più piene, più alte e più sicuramente dominatrici.

Matematica e filosofia, formazioni entrambe dello stesso pensiero costruttivo e critico, hanno, in fondo molti problemi comuni — i fondamentali, forse; quelli del *finito* e dell'*infinito* intanto. Ed esse possono mu-

tuamente giovarsi dei loro sforzi, che, nell'economia generale dello spirito, sono solidali, anche quando pretendono di procedere separati.

Il piano d'incontro non sarà più certo, nè il realismo ingenuo dei fisici, nè l'ontologismo trascendentale dei metafisici; ma sarà quella sede più profonda, quella fucina riposta, da cui lo spirito umano — sotto la pressione dei bisogni e dei problemi, dei dolori e delle ansie — trae e in cui organizza, ritempra, le idee; cioè gli strumenti di cui esso si arma nel diuturno attrito col noto e con l'ignoto, con la realtà naturale e col mistero: le idee, che, quando sono veramente tali, non sono più definibili, nè come filosofiche, nè come matematiche, nè come scientifiche, ma idee semplicemente, leve invisibili e irresistibili che promuovono la storia umana del mondo.

Palermo, maggio 1923.



